



## СПОСОБ ЛОКАЛЬНОГО УКРУПНЕНИЯ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ В $\mathbb{R}^3$

Герасимов Иван Владимирович

### Аннотация

В статье рассмотрена задача построения симплициального подразделения специального вида, допускающего локальное укрупнение в трехмерном слое. Предложен метод, позволяющий однозначно определить подразделение с необходимыми свойствами. Выведены калибровочные соотношения аппроксимации Куранта, соответствующие укрупнению симплициального подразделения.

**Ключевые слова:** *симплициальное подразделение, триангуляция, аппроксимация Куранта.*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В задачах аппроксимации возникает необходимость разбивать область определения функции на непересекающиеся подобласти. Для разбиения часто используется симплициальное подразделение области. Множество вершин симплициального подразделения называют *сеткой*.

В одномерном случае  $\mathbb{R}^1$ , сетка — это последовательность точек, называемых *узлами*. Прямая при этом подразделяется на множество интервалов, лежащих между узлами сетки. При необходимости локального укрупнения сетки, соответствующий узел выбрасывается, а интервалы, разделяемые этим узлом, объединяются.

Для двумерного случая  $\mathbb{R}^2$  ситуация несколько усложняется, поскольку произвольная правильная триангуляция, вообще говоря, не может быть локально укрупнена с сохранением правильности. Одним из подходов в данном случае может являться использование триангуляции специального вида, например, как это было сделано в [2].

В настоящей статье предлагается распространение полученных результатов на  $\mathbb{R}^3$ .

### 2. ПОСТРОЕНИЕ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Существенным свойством, которым обладает интервал в  $\mathbb{R}^1$  является возможность разбить его на два меньших интервала, каждый из которых подобен исходному. Это свойство позволяет производить как измельчение сетки, так и обратный процесс — укрупнение.

В  $\mathbb{R}^2$  любой треугольник может быть разбит на пару непересекающихся треугольников, поэтому правильная триангуляция может быть локально измельчена. Однако, как уже упоминалось выше, укрупнение сетки не удастся произвести так же просто, как в  $\mathbb{R}^1$ .

Покажем, как выбор триангуляции специального вида помогает преодолеть это затруднение. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник. Он может быть разбит на пару меньших треугольников, каждый из которых подобен исходному. Обратное: пара одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников может быть объединена в один больший треугольник, подобный меньшим, если меньшие треугольники пересекаются по одному общему катету, а другие их катеты лежат на одной прямой (см. рис. 1). Дополнительные ограничения на триангуляцию позволяют производить укрупнение в несколько приемов, переходя ко все большим областям.

Вопрос о возможности локального укрупнения симплицального подразделения в  $\mathbb{R}^3$  является весьма актуальным. К сожалению, непосредственное применение подхода аналогичного изложенному выше, применяемому в случае меньшего числа измерений, наталкивается на трудности, а именно — на невозможность построить трехмерный невырожденный симплекс, который можно было бы разбить на два меньших симплекса, подобных исходному. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $S \in \mathbb{R}^3$  — невырожденный симплекс, то есть все его шесть ребер имеют ненулевую длину. Не существует такого разбиения  $S$  на два меньших непересекающихся симплекса  $S_1$  и  $S_2$ , каждый из которых мог бы быть получен подобным преобразованием  $S$ . Под подобным преобразованием симплекса понимается его сжатие (растяжение), равномасштабное по всем трем осям с возможным зеркальным отражением.

**Доказательство.** Обозначим ребра  $S$  через  $x_i, i \in \{1..6\}$ . Без умаления общности положим  $x_6 \equiv 1$ . При разбиении симплекса на два меньших, на одном из ребер  $S$  фиксируется точка, отличная от концов ребра, которая соединяется с двумя оставшимися вершинами симплекса. Без потери общности будем считать, что эта дополнительная точка располагается на ребре  $x_6$  и разбивает его на два меньших отрезка, которые мы обозначим  $x_7$  и  $x_8$ . Отрезки, соединяющие эту точку с двумя другими вершинами  $S$  обозначим  $x_9$  и  $x_{10}$ . Таким образом, по построению, симплекс  $S_1$  задается ребрами  $x_1, x_2, x_3, x_7, x_9$ , и  $x_{10}$ , а  $S_2$  задается ребрами  $x_1, x_3, x_4, x_8, x_9$  и  $x_{10}$ .

Предположим теперь, вопреки утверждаемому в теореме, что  $S_1$  и  $S_2$  подобны исходному симплексу  $S$ . Это означает, что существуют такие коэффициенты пропорциональности  $0 < k_1, k_2 < 1$ , что выполняются соотношения подобия вида  $x_i = k_m \cdot x_j$ . Здесь  $x_i$  — ребро  $S_m$ , а  $x_j$  — соответствующее ребро  $S$ .

Соответствие между ребрами симплексов  $S$  и  $S_m$  можно указать следующим способом. Пронумеруем произвольным образом вершины каждого симплекса  $S_m$  числами от 1 до 4. Каждая перестановка номеров вершин определит соответствие ребер  $S$  и  $S_m$ . Всего существует  $4!$  вариантов соответствия вершин симплексов, и, следовательно, есть  $4! \cdot 4! = 576$  вариантов разбиения  $S$  на  $S_1$  и  $S_2$  с указанием соответствия вершин. Каждый такой вариант задает систему линейных уравнений, в которых переменными являются величины  $x_i$ . К каждой системе добавляются еще два уравнения  $x_7 + x_8 = x_6$  и  $x_6 = 1$ , справедливые по построению.

Последовательное рассмотрение полученных 576 систем уравнений показывает, что 380 из них содержат уравнение вида  $(1 - k_m) \cdot x_j = 0$ , которое не может соответствовать невырожденному симплексу.



Рис. 1. Последовательное укрупнение триангуляции

Проверив оставшиеся 196 систем, убеждаемся что все они являются несовместными. Для примера возьмем одну из указанных систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_2x_6 + x_5 = 0 \\ -k_1x_6 + x_3 = 0 \\ x_6 - k_2x_3 = 0 \\ x_6 - k_1x_5 = 0 \\ -k_1x_3 + x_2 = 0 \\ x_2 - k_2x_5 = 0 \\ -k_2x_4 + x_{10} = 0 \quad (*) \\ -k_1x_4 + x_7 = 0 \quad (*) \\ x_4 - k_1x_{10} = 0 \quad (*) \\ x_1 = 1 \\ x_7 + x_8 = 1 \quad (*) \\ x_8 - k_2x_{10} = 0 \quad (*) \end{array} \right.$$

Для того чтобы установить ее несовместность, достаточно рассмотреть уравнения, отмеченные звездочками. Подставив второе и пятое из них в четвертое, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_2x_4 + x_{10} = 0 \\ x_4 - k_1x_{10} = 0 \\ k_1x_4 + k_2x_{10} = 1 \end{array} \right.$$

Отсюда и видна несовместность системы. Действительно, из первого и третьего уравнения

$$\text{находим } x_4 = \frac{1}{k_2^2 + k_1}, \quad x_{10} = \frac{k_2}{k_2^2 + k_1}.$$

Эти значения могут быть решениями второго уравнения последней системы только тогда, когда  $k_1 = k_2 = 1$ , что невозможно по определению коэффициентов.

Аналогично устанавливается несовместность каждой из остальных 195 систем, что и доказывает теорему.  $\square$

Определим теперь область  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , представляющую собой параллелепипед. Зададим в  $\Omega$  симплицальное подразделение. Для этого сперва введем декартову прямоугольную систему координат  $(OX, OY, OZ)$  так, чтобы плоскость  $OX - OY$  проходила через его нижнее основание, а оси были направлены вдоль ребер параллелепипеда. Масштаб на осях выберем таким, чтобы длина и ширина параллелепипеда (то есть его размеры вдоль осей  $OX$  и  $OY$ ) оказались кратными двум, а высота была равна единице. В плоскости  $OX - OY$  зададим триангуляцию  $\mathfrak{T}$  следующим набором треугольников:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{x,y} & \mathbf{P}_{x+2,y} & \mathbf{P}_{x+1,y+1} \\ \mathbf{P}_{x+2,y} & \mathbf{P}_{x+2,y+2} & \mathbf{P}_{x+1,y+1} \\ \mathbf{P}_{x+2,y+2} & \mathbf{P}_{x,y+2} & \mathbf{P}_{x+1,y+1} \\ \mathbf{P}_{x,y+2} & \mathbf{P}_{x,y} & \mathbf{P}_{x+1,y+1} \end{array} \right\|, \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}_{x,y}$  — вектор с целочисленными координатами  $x$  и  $y$ , кратными двум,  $x, y \in \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Заметим, что по определению  $\Omega$  указанная триангуляция  $\mathfrak{T}$  покрывает основание параллелепипеда целым числом треугольников.

Каждый треугольник  $\mathbb{T} \in \mathfrak{T}$  является основанием призмы  $\mathbb{P}$  с прямоугольными боковыми гранями. Второе основание призмы лежит в той же плоскости, что и верхняя грань параллелепипеда  $\Omega$ . Каждую такую призму можно разбить на три непересекающихся сим-

плекса; при этом каждая прямоугольная боковая грань призмы делится диагональю, являющейся одномерным ребром составляющего симплекса. Для удобства изложения припишем каждой диагонали направление: будем считать, что диагональ всегда направлена от нижнего основания призмы к верхнему.

Итак, для того чтобы получилось правильное симплицальное подразделение области  $\Omega$ , осталось указать разбиение каждой призмы на симплексы. Для этого, очевидно, достаточно указать какой из двух вариантов диагонали используется на каждой грани каждой призмы. При этом на гранях, являющихся общими для двух соседних призм, диагональ должна быть единой для обеих призм.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbb{P}$  — призма с треугольными основаниями и прямоугольными боковыми гранями. Рассмотрим проекции направленных диагоналей боковых граней на одно из оснований. Эти проекции образуют тройку компланарных векторов.

*Набор диагоналей задает разбиение призмы на симплексы тогда и только тогда, когда сумма указанных трех векторов отлична от нуля. Точнее — один из этих векторов равен сумме двух других.*

**Доказательство.** Если сумма векторов-проекций направленных диагоналей равна нулю, то проекции образуют замкнутый контур с единым направлением обхода (либо по часовой, либо против часовой стрелки), а это значит, что все три диагонали являются попарно скрещивающимися и ни через какую пару диагоналей нельзя провести секущую плоскость. Другими словами, такой набор диагоналей не задает разбиения призмы.

Если же сумма векторов отлична от нуля, то проекции диагоналей разнонаправлены, и найдется пара диагоналей, которые пересекаются в одной из вершин призмы. Плоскость, проходящая через эту пару диагоналей отсекает от призмы симплекс. Оставшаяся фигура представляет собой пирамиду с прямоугольным основанием (боковой гранью исходной призмы). Плоскость, проходящая через вершину получившейся пирамиды и через диагональ ее основания разделяет пирамиду на два симплекса.

Теорема доказана. □

Для наглядности приведем иллюстрацию обоих вариантов выбора диагоналей боковых граней призмы: слева — задающего, а справа — не задающего разбиения на симплексы (рис. 2).

Теорема (2) позволяет указать простой прием для выбора диагоналей у призм, который, во-первых, задает разбиение каждой призмы на симплексы, а во-вторых, обеспечивает согласованность разбиения для каждой пары соседних призм.

Зафиксируем на плоскости пару неколлинеарных осей  $l_1$  и  $l_2$  (например, можно воспользоваться уже заданными координатными осями  $OX$  и  $OY$ , хотя это и не обязательно). Заметим, что проекции обеих диагоналей боковой грани призмы на эти оси совпадают с точностью до направления. Наша договоренность, что направление диагонали выбирается от нижнего основания призмы к верхнему, означает, что направления обеих проекций диагоналей грани на оси  $l_1$  и  $l_2$  будут противоположными друг другу.

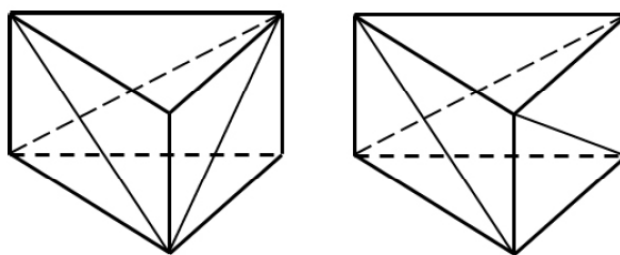


Рис. 2. Варианты выбора диагоналей граней призмы

Для каждой грани выберем одну из двух диагоналей по изложенному далее методу. В дальнейшем будем ссылаться на определенный здесь метод как на метод  $(O)$ . Если плоскость рассматриваемой грани не ортогональна  $l_1$ , так что проекции диагоналей на  $l_1$  не вырождаются в точку, выберем ту диагональ, направление проекции которой совпадет с направлением  $l_1$ . Если плоскость грани ортогональна  $l_1$ , то выберем ту диагональ, направление проекции которой на  $l_2$  совпадает с направлением  $l_2$ . Доказательство корректности этого способа выбора диагоналей очевидно.

### 3. УКРУПНЕНИЕ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ

Напомним, что целью построения специального симплицального подразделения является возможность производить его локальное укрупнение. Для определенного выше симплицального подразделения при соблюдении определенных условий укрупнение можно производить в несколько приемов.

Вначале рассмотрим одну такую пару соседних призм, которые могут быть объединены в одну большую призму. Легко установить, что всего существует восемнадцать вариантов того, как эти призмы могут быть подразделены на симплексы. Половина из этих вариантов являются зеркальным отображением других, что позволяет ограничиться рассмотрением только девяти различных вариантов.

Для наглядности приведем проекции всех девяти вариантов на основание области  $\Omega$  (см. рис. 3).

Нетрудно видеть, что только первые четыре из приведенных вариантов согласуются с методом  $(O)$ . Варианты с пятого по девятый имеют в проекции пару коллинеарных разнонаправленных векторов, что, по заданным в методе  $(O)$  правилам, невозможно.

Выпишем преобразования матриц инцидентий, соответствующие каждому из обозначенных выше четырех вариантов. Для простоты ограничимся призмами, лежащими около начала координат, координаты вершин которых равны  $-1, 0$  или  $1$ . Для обозначения трехмерного вектора с целочисленными координатами  $x, y, z$  используем символ  $\mathbf{q}_{x,y,z}$ .

Первый вариант допускает следующий выбор направлений, согласующихся с методом  $(O)$ : первая ось  $l_1$  направлена вертикально снизу вверх, вторая ось  $l_2$  направлена горизонтально справа налево. Заметим, что этот выбор осей не единственен.

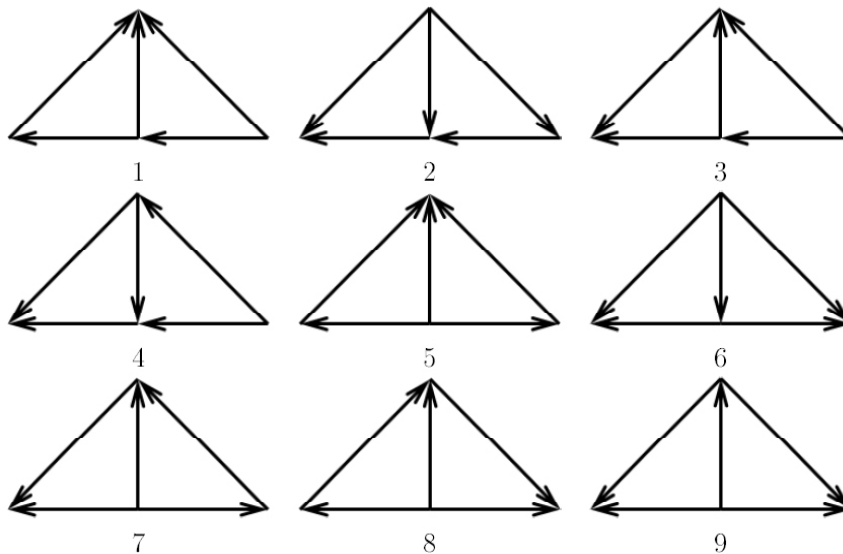


Рис. 3. Проекция разбиений пары призм

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Во втором варианте направления осей могут быть выбраны так: первая ось  $l_1$  направлена вертикально сверху вниз, вторая ось  $l_2$  направлена горизонтально справа налево. Такой выбор осей, очевидно, согласуется с методом (O).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{1,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{1,0,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Возможный выбор осей для третьего варианта может быть таким: первая ось  $l_1$  направлена горизонтально справа налево, вторая ось  $l_2$  направлена вертикально снизу вверх.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для четвертого из указанных выше вариантов выбор осей, согласованный с методом (O), может быть следующим: первая ось  $l_1$  направлена горизонтально справа налево, вторая ось  $l_2$  направлена вертикально сверху вниз. Преобразование матрицы инцидентий при этом выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,0,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{0,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{-1,0,0} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{-1,0,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} \\ \mathbf{q}_{-1,0,1} & \mathbf{q}_{1,0,0} & \mathbf{q}_{0,1,1} & \mathbf{q}_{1,0,1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Любой другой вариант объединения двух смежных призм может быть получен из одного из четырех рассмотренных при помощи подходящего линейного преобразования.

## АППРОКСИМАЦИЯ КУРАНТА

В качестве примера приложения описанного выше способа укрупнения симплицеального подразделения выведем калибровочные соотношения для аппроксимации Куранта. Аналогичные соотношения для двумерной триангулированной области были получены

в [1]. Используемые в этом пункте обозначения во многом совпадают с введенными в [4, с. 497]. Для целей примера мы ограничимся рассмотрением одной пары объединяемых призм, то есть группы из восьми симплексов.

Симплициальный комплекс, заданный по методу (O), обозначим  $\mathfrak{Z}$ .

Обозначим  $C(\Omega)$  пространство непрерывных функций, заданных в области  $\Omega$ . Пусть далее  $J$  — какое-либо индексное множество узлов комплекса  $\mathfrak{Z}$ . *Базисный элемент* аппроксимации Куранта  $\omega_j, j \in J$  есть непрерывная функция, равная единице в узле  $\mathbf{t}_j$ , называемом *центральным узлом* элемента, и обращающаяся в нуль во всех остальных узлах подразделения, линейная на каждом симплексе  $\mathbb{S} \in \mathfrak{Z}$ . Через  $\omega_{\{x,y,z\}}$  будем обозначать базисный элемент, центральным узлом которого является точка с декартовыми координатами  $x, y, z$ .

Рассмотрим систему функционалов  $\{g_i\}_{i \in J}$ , заданную на  $C(\Omega)$  формулами

$$\langle g_i, u \rangle = u(\mathbf{t}_i) \quad \forall i \in J \quad \forall u \in C(\Omega). \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что для базисных элементов справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle g_j, \omega_j \rangle &= 1 \quad \forall j \in J, \\ \langle g_i, \omega_j \rangle &= 0 \quad i \neq j \quad \forall i, j \in J, \end{aligned}$$

которые показывают, что формулами (6) задается продолжение на  $C(\Omega)$  системы функционалов, *биортогональной* системе  $\{\omega_j\}$ .

Через  $\tilde{\omega}_j$  обозначим базисные элементы укрупненного симплицального подразделения. Базисный элемент, декартовы координаты центрального узла которого есть  $x, y, z$ , обозначим  $\tilde{\omega}_{\{x,y,z\}}$ .

Для получения выражений базисных элементов укрупненного симплицального подразделения воспользуемся их разложением по базису исходного комплекса  $\mathfrak{Z}$ .

$$\tilde{\omega}_k(\mathbf{t}) = \sum_{j \in J} \omega_j \cdot \tilde{\omega}_k(\mathbf{t}_j).$$

Или, используя в обозначениях декартовы координаты,

$$\tilde{\omega}_{\{x,y,z\}} = \sum_{\{x',y',z'\}} \omega_{\{x',y',z'\}} \cdot \tilde{\omega}_{\{x,y,z\}}(x',y',z'), \quad (7)$$

где последняя сумма берется по координатам  $x', y', z'$  всех узлов подразделения. Такие соотношения называются *калибровочными*.

В соответствии с общей формулой (7), для укрупнения, производимого по любому варианту из (2)–(5), получаем выражения:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{\{-1,0,0\}} = \omega_{\{-1,0,0\}} + \frac{1}{2} \cdot \omega_{\{0,0,0\}} \\ \tilde{\omega}_{\{1,0,0\}} = \omega_{\{1,0,0\}} + \frac{1}{2} \cdot \omega_{\{0,0,0\}} \\ \tilde{\omega}_{\{-1,0,1\}} = \omega_{\{-1,0,1\}} + \frac{1}{2} \cdot \omega_{\{0,0,1\}} \\ \tilde{\omega}_{\{1,0,1\}} = \omega_{\{1,0,1\}} + \frac{1}{2} \cdot \omega_{\{0,0,1\}} \end{cases}$$

Для остальных базовых элементов укрупненного симплицального подразделения выполняется равенство  $\tilde{\omega}_{\{x,y,z\}} = \omega_{\{x,y,z\}}$ . Ясно, что калибровочные соотношения для укрупнения любых других пар смежных призм могут быть получены при помощи подходящего линейного преобразования, примененного к координатам узлов, фигурирующим в выведенных выражениях.

## 5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА НЕСКОЛЬКО СЛОЕВ

Очевидным обобщением изложенного способа симплицального подразделения слоя является подразделение нескольких смежных слоев.

Рассмотрим сперва два трехмерных параллелепипеда  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , пересекающихся только лишь по одной общей грани. Введем прямоугольную декартову систему координат, связанную с  $\Omega_1$ , аналогично тому, как мы это делали выше для области  $\Omega$ .

Зафиксировав в плоскости  $OX-OY$  пару осей  $l_1, l_2$ , произведем симплицальное подразделение области  $\Omega_1$  по методу (O). При этом в плоскости, проходящей через общую грань параллелепипедов, мы получим триангуляцию, которая позволит нам произвести симплицальное подразделение области  $\Omega_2$ , для чего нам потребуется всего лишь указать вторую пару направлений  $l'_1, l'_2$ , которая будет использована при применении метода.

Из всех возможных вариантов выбора направлений осей  $l'_1, l'_2$ , два варианта представляют особый интерес.

Первый вариант тривиален: направление  $l_1$  совпадает с  $l'_1$ , а направление  $l_2$  совпадает с  $l'_2$ . В этом случае параллелепипеды  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  вместе с определенными на них симплицальными подразделениями представляют точную копию друг-друга. Укрупнение подразделения производится одновременно и однотипно в обоих слоях и снова приводит к одинаково подразделенным параллелепипедам (рис. 4).

Другой представляющий интерес вариант, получается, если мы направим ось  $l'_1$  в противоположную с  $l_1$  сторону, а ось  $l'_2$  направим в сторону, противоположную с  $l_2$ . В этом варианте, так же, как и в первом, мы можем производить одновременное укрупнение в обоих слоях, при этом второй параллелепипед со своим симплицальным подразделением представляет собой зеркальное отражение первого.

Распространение метода на большее количество слоев производится аналогично. При этом, если это оказывается удобным в приложении, варианты выбора направлений осей  $l_1$  и  $l_2$  можно варьировать от слоя к слою.

Представляется заманчивым иметь возможность производить укрупнение симплицального подразделения за счет объединения, пусть даже однократного, симплексов, принадлежащих разным слоям. К сожалению, при указанных выше вариантах выбора осей такое укрупнение не представляется возможным (доказательство не приводим). Возможные пути решения этой задачи могут лежать либо в ином выборе осей, либо в замене метода (O) на другой, применение которого приведет к образованию в разных слоях симплексов, допускающих объединение.

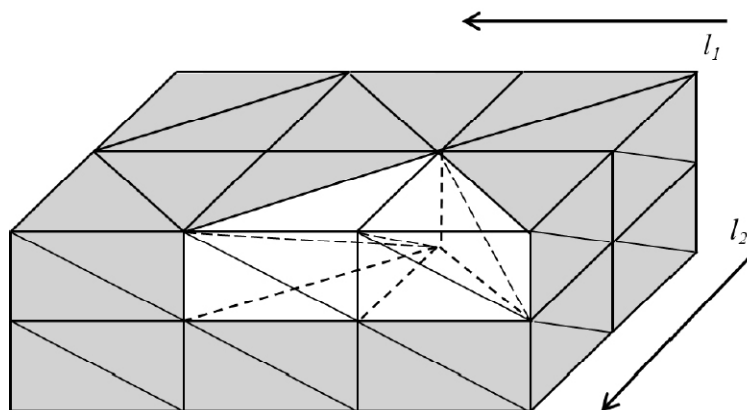


Рис. 4. Подразделение смежных слоев



## Литература

1. Демьянович Ю.К., Зимин А.В. Аппроксимации курантова типа и их вейвлетное разложение // Сб. Проблемы математического анализа, 2008. Т. 37. С. 3–22.
2. Арсентьева Е.П., Демьянович Ю.К. Адаптивные сплайн-вейвлетные разложения двумерных потоков числовой информации // Сб. Проблемы математического анализа, 2011. Т. 56. С. 3–17.
3. Демьянович Ю.К., Романовский Л.М. Локальное укрупнение триангуляции и двумерные сплайн-вейвлеты // Труды конф. СПИСОК–2012. С. 177–182.
4. Демьянович Ю.К. Теория сплайн-всплесков. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013.

## METHOD OF LOCAL ENLARGEMENT OF SIMPLICIAL COMPLEX IN $\mathbb{R}^3$

Gerasimov I.V.

### Abstract

The problem of the definition of the special simplicial subdivision of a three-dimensional layer is considered in the article. The method that allows to uniquely define the subdivision with required characteristics is introduced. The calibration relations for the Courant-type approximation, which correspond to the enlargement are derived.

**Keywords:** *simplicial subdivision, triangulation, Courant-type approximation.*

Герасимов Иван Владимирович,  
старший инженер-программист  
«ORACLE», аспирант математико-  
механического факультета СПбГУ,  
ivan.v.gerasimov@gmail.com



Наши авторы, 2014.  
Our authors, 2014.